

УДК 621.382

## МЕХАНИЗМ МЕДЛЕННОЙ РЕЛАКСАЦИИ РАВНОВЕСНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

С.В. МЕЛКОНЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 13 ноября 2000 г.)

Рассмотрен физический механизм возникновения и последующего медленного (диффузионного) затухания равновесных флуктуаций функции распределения электронов и фононов в невырожденных полупроводниках. Показано, что флуктуации, возникающие в более длинноволновой области энергетического спектра, при больших временах затухают по закону, пропорциональному  $t^{-1/2}$ .

### 1. Введение

Одной из важнейших задач в теории полупроводников является проблема физического происхождения  $1/f$ -флуктуации тока (или напряжения). Результаты обширных экспериментальных исследований и основные затруднения теории обобщены и систематизированы во многих обзорных работах (см., например, [1-3]). В качестве возможного источника  $1/f$ -флуктуаций часто рассматриваются электрон-фононные взаимодействия [4-7]. Несмотря на определенные успехи, до сих пор в теории нет однозначного мнения о происхождении  $1/f$ -флуктуаций. Серьезные трудности возникают при математическом описании этих флуктуаций. Некоторые математические модели [8,9] указывают на существование простого единичного импульса, спектральная плотность мощности которого имеет форму  $1/f$  до сколь угодно низких частот. В качестве такого импульса может служить любая ограниченная временная функция  $Y(t)$ , которая при больших значениях  $t$  уменьшается по закону  $t^{-1/2}$  [8].

### 2. Постановка задачи

В настоящей работе обсуждаются флуктуации функции распределения (ФР) электронов и фононов, возникающие в равновесных полупроводниках. Для определенности предположим, что исследуемый неограниченный, однородный и невырожденный электронный полу-

проводник имеет стандартную зонную структуру. Чтобы упростить рассуждения и сделать более ясной роль фононов<sup>1)</sup>, допустим, что из известных механизмов рассеяния существенны только электрон-фононные (Э-Ф), фонон-электронные (Ф-Э) и фонон-фононные (Ф-Ф) взаимодействия. Обсудим те физические условия при которых случайно возникшее возмущение в подсистеме фононов переходит к электронам. Для этого воспользуемся элементарным приближением времени релаксации. В рассматриваемом случае механизм затухания возмущения в системе фононов будет обусловлен Ф-Э и Ф-Ф взаимодействиями. Поэтому время жизни  $\tau_{ph}$  данного фонона определяется как  $\tau_{ph}^{-1} = \tau_{ph,e}^{-1} + \tau_{ph,ph}^{-1}$ , где  $\tau_{ph,e}$  и  $\tau_{ph,ph}$  — времена релаксации, обусловленные Ф-Э и Ф-Ф рассеяниями, соответственно. Первое характерное время  $\tau_{ph,e}$  обратно пропорционально  $q$  [10]:  $\tau_{ph,e} = \tau_{0,1}(T)(q_T/q)$ , где  $q_T = k_B T / \hbar v_0$  — волновой вектор тепловых фононов,  $T$  — температура. Второе характерное время  $\tau_{ph,ph}$  имеет довольно сильную зависимость от  $q$ . Обычно  $\tau_{ph,ph} = \tau_{0,2}(T)(q_T/q)^n$  с показателем степени  $n > 2$ . Часто встречается значение  $n = 4$  [10,11]. Коэффициенты  $\tau_{0,1}(T)$  и  $\tau_{0,2}(T)$  определяются параметрами полупроводника [10,11]. Исходя из того, что  $\tau_{ph,e}$  и  $\tau_{ph,ph}$  по-разному зависят от  $q$ , формально вводится некоторый характерный параметр  $q_0$ , определяемый из условия сшивания при  $q = q_0$  ( $\tau_{ph,e}(q_0) = \tau_{ph,ph}(q_0)$ ) и описывающий положение плоскости (в одномерном случае) разделения областей доминирующих механизмов рассеяния фононов в  $q$ -пространстве в пределах первой зоны Бриллюэна. Очевидно, что  $q_0 = q_T (\tau_{0,2} / \tau_{0,1})^{1/(n-1)}$  и обычно находится в более длинноволновой (ДВ) области  $|q_0| < q_T$ . Из определения  $q_0$  ясно, что фононы с  $|q| > q_0$  интенсивно рассеиваются на других фононах ( $\tau_{ph,e} > \tau_{ph,ph}$ ), а фононы с  $|q| < q_0$  главным образом рассеиваются на электронах ( $\tau_{ph,e} < \tau_{ph,ph}$ ).

Предположим, что в момент времени  $t_0$  в результате Ф-Ф рассеяний произошло случайное увеличение или уменьшение ФР продольных (L) фононов на  $\tilde{g}_q$ . Ясно, что релаксация флуктуации ФР L-фононов с  $|q| > q_0$ , обусловленная Ф-Ф рассеяниями, не нарушает равновесное распределение электронов. Наиболее интересна релаксация флуктуации L-фононов в области  $|q| < q_0$ . Из кинематики рассеяния известно [10], что при эффективных рассеяниях электроны поглощают и испускают L-фононы с  $q \approx k$  ( $k$  — волновой вектор электрона). Поэтому, в результате релаксации флуктуации L-фононов с  $|q| < q_0$ , возмущение переходит к электронам с волновым вектором  $|k| < q_0/2$ . Таким образом, часть равновесных электронов, приобретая от L-фононов дополнительный импульс и энергию, переходит в неравновесное

<sup>1)</sup> Для упрощения ниже рассматриваются только акустические фононы с законом дисперсии вида  $\omega_q = v_0 q$ , где  $v_0$  — скорость,  $q$  — волновой вектор, а  $\omega_q$  — частота фонона.

состояние. В свою очередь эти неравновесные электроны при столкновениях с фононами "возвращают" этот импульс (энергию) этим же ДВ фононам. В результате, при полном отсутствии других процессов рассеяний, между ДВ электронами и ДВ L-фононами устанавливается динамическое равновесие.

Хорошо известно [10], что основной вклад в Ф-Ф взаимодействиях возникает от процессов распада и слияния с участием трех фононов. Причем, в силу правил отбора, в основном взаимодействуют фононы с различными продольными (L) и поперечными (T) поляризациями [10]. Поэтому мы можем представить начальную флуктуацию фононов как случайное перераспределение энергии и квазиимпульса между L и T ветвями фононного спектра:

$$\sum_q (\hbar q \tilde{g}_{q,L}(t) + \hbar q \tilde{g}_{q,T}(t)) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \sum_q (\hbar \omega_q \tilde{g}_{q,L}(t) + \hbar \omega_q \tilde{g}_{q,T}(t)) \Big|_{t=t_0} = 0. \quad (1)$$

Здесь для определенности учтены только нормальные процессы, хотя нетрудно убедиться, что вышеописанное состояние динамического равновесия возникает также при рассмотрении Ф-Ф столкновений с перебросом.

Дальнейшее перераспределение энергии и квазиимпульса между L-фононами с  $|q| < q_0$  и электронами происходит таким образом, что

$$\begin{aligned} \sum_k \hbar k \tilde{f}_k(t) + \sum_q \hbar q \tilde{g}_{q,L}(t) &= \sum_q \hbar q \tilde{g}_{q,L}(t_0), \\ \sum_k \mathcal{E}_k \tilde{f}_k(t) + \sum_q \hbar \omega_q \tilde{g}_{q,L}(t) &= \sum_q \hbar \omega_q \tilde{g}_{q,L}(t_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\tilde{f}_k$  - возмущение ФР электронов,  $\mathcal{E}_k$  - энергия электрона в состоянии  $k$ . В дальнейшем убедимся, что условия (2) не являются очень строгими. Они имеют место лишь для сравнительно малых интервалов времени  $\Delta t$ .

### 3. Теория

Ниже рассмотрена совокупность связанных между собой кинетических уравнений, описывающих приближение к равновесию в системе взаимодействующих электронов и фононов. Далее мы будем интересоваться лишь временными флуктуациями ФР. Поэтому вместо зависящей от координат точных ФР электронов,  $f_k(r, t)$ , и фононов,  $g_q(r, t)$ , рассмотрим их значения, усредненные по всему объему образца, т.е. функции  $f_k(t)$  и  $g_q(t)$ .

Кинетические уравнения Больцмана можно представить в виде

$$\frac{\partial f_k(t)}{\partial t} = J_{e,ph}[g_q, f_k], \quad \frac{\partial g_q(t)}{\partial t} = J_{ph,e}[g_q, f_k] + J_{ph,ph}[g_q]. \quad (3)$$

Здесь  $J_{e,ph}$ ,  $J_{ph,e}$  и  $J_{ph,ph}$  - интегралы столкновений Э-Ф, Ф-Э и Ф-Ф рассеяний.

Предположим, что в момент времени  $t=0$  в результате случайных Ф-Ф взаимодействий произошла флуктуация ФР фононов. Это случайное возмущение представим в виде начальных условий:  $\tilde{g}_q(t=0) = G_q$ ,  $\tilde{f}_k(t=0) = 0$ . Начальное возмущение  $G_q$  характеризует перераспределение энергии и квазиимпульса между ветвями или частями одной и той же ветви фононного спектра.

Представим искомые ФР в виде

$$f_k(t) = f_k^0 - \tilde{f}_k(t), \quad \tilde{f}_k(t) \equiv a_k(t) \frac{\partial f_k^0}{\partial \mathcal{E}_k}; \quad g_q(t) = g_q^0 - \tilde{g}_q(t), \quad \tilde{g}_q(t) \equiv b_q(t) \frac{\partial g_q^0}{\partial \hbar \omega_q}. \quad (4)$$

Здесь символами "0" и "~" обозначены равновесные и флуктуационные составляющие ФР, соответственно,  $a_k(t)$  и  $b_q(t)$  - неизвестные функции.

Для решения ур.(3) разделим первую зону Бриллюэна на области  $|q| > q_0$  и  $|q| < q_0$ . В области  $|q| > q_0$ , пренебрегая членом  $J_{ph,e}$  в ур.(3) ( $\tau_{ph,e} > \tau_{ph,ph}$ ), в приближении времени релаксации ( $\tilde{J}_{ph,ph} = -\tilde{g}_q / \tau_{ph,ph}$ ) получим

$$\tilde{g}_q(t) = G_q \exp\left[-\frac{t}{\tau_{ph,ph}}\right], \quad \tilde{f}_k(t) = 0. \quad (5)$$

Как видно из (5), флуктуации  $\tilde{g}_q$  затухают по экспоненциальному закону, не нарушая равновесное распределение электронов. При этом важно отметить, что время релаксации  $\tau_{ph,ph}$  может быть обусловлено как нормальными процессами, так и процессами переброса.

В области  $|q| < q_0$  в ур.(3) можно пренебречь членом  $J_{ph,ph}$  ( $\tau_{ph,e} < \tau_{ph,ph}$ ). Используя (4) и хорошо известные выражения интегралов столкновений однофононных Ф-Э и Э-Ф взаимодействий [11], можно ур.(3) представить в следующем линеаризованном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{q,k'} \frac{f_{k'}^0}{f_k^0} \left\{ |M_{k \rightarrow k'}^{+q}|^2 g_q^0 \delta(\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k'} - \hbar \omega_q) (a_{k'} - a_k + b_q) + \right. \\ &+ \left. |M_{k \rightarrow k'}^{-q}|^2 (1 + g_q^0) \delta(\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k'} + \hbar \omega_q) (a_{k'} - a_k - b_q) \right\}, \quad (6) \\ \frac{\partial b_q}{\partial t} &= \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{k,k'} \frac{f_k^0 (1 - f_{k'}^0)}{g_q^0} |M_{k \rightarrow k'}^{+q}|^2 \delta(\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k'} - \hbar \omega_q) (a_k - a_{k'} - b_q). \end{aligned}$$

Здесь  $|M_{k \rightarrow k'}^{\pm q}|^2$  - матричный элемент перехода [11],  $\delta(\dots)$  - дельта-функция Дирака.

Из законов сохранения следует, что фононы с волновым векто-

ром  $|q| < q_0$  эффективно взаимодействуют в основном с электронами, имеющими волновой вектор  $|k| < q_0/2$  (горизонтальные переходы) [10]. Хотя и взаимодействия с остальными электронами не запрещены, однако они неэффективны (вертикальные переходы) и ими можно пренебречь. Вместе с тем ясно, что в невырожденных полупроводниках процессы переброса при рассеянии электронов с фононами  $|q| < q_0$  практически невозможны. Исходя из этого, нетрудно убедиться, что функции вида

$$a_k = \lambda_1 \varepsilon_k + \lambda_2 k, \quad b_q = \lambda_1 \hbar \omega_q + \lambda_2 q \quad (7)$$

удовлетворяют ур.(6). Постоянные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются из начальных условий. Очевидно, что в данном случае величины  $a_k$  и  $b_q$  тоже являются постоянными.

Решение ур.(6) в виде (7), соответствующее стационарному состоянию системы [11], получается в результате линеаризации ур.(3), с пренебрежением таких вторичных эффектов, как повторные столкновения и неупругие вертикальные переходы. Можно ожидать, что в общем случае установившееся состояние (7) не является строго стационарным. Система все же возвращается к состоянию равновесия, а постоянные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  все же зависят от времени  $t$ . Причем  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  должны изменяться во времени настолько медленно, чтобы при малых  $\Delta t$  их изменениями можно было пренебречь, и в первом приближении считать  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  постоянными величинами. Для выявления законов затухания  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$  (следовательно,  $a_k(t)$  и  $b_q(t)$ ) от  $t$  целесообразно привлечь кинетическое уравнение Фоккера-Планка в виде [11]

$$\frac{\partial \tilde{g}_q(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial q^2} [B_q \tilde{g}_q(t)]. \quad (8)$$

Из ур.(7) видно, что величины  $a_k$  и  $b_q$  не являются независимыми. Так, если  $b_q$  зависит от  $t$ , то из-за сильного Ф-Э взаимодействия аналогичная зависимость будет иметь место и для  $a_k$ , и наоборот. Поэтому здесь мы можем ограничиться рассмотрением уравнения типа (8) только для фононов. Описываемый ур.(8) процесс называется диффузией в импульсном пространстве [11]. Величина  $B_q$  играет роль коэффициента диффузии фононов.

Граничные "точки"  $q \approx \pm q_0$  выполняют роль "поглощающих" экранов. Диффундирующие в области  $|q| < q_0$  неравновесные фононы, достигшие экрана, "поглощаются" им и исключаются из дальнейшего рассмотрения. Физически это означает, что фонон, достигший области  $|q| > q_0$ , быстро (см. ур.(5)) релаксирует из-за сильного Ф-Ф взаимодействия. Поэтому при больших  $t$  можно считать, что в этой области  $\tilde{g}_q \approx 0$  ( $G_q \approx 0$ ). Следовательно, начальные и граничные условия для ур.(8) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{g}_q(t=0) = G_q; \quad \tilde{g}_q(t)|_{|q|>q_0} = 0. \quad (8a)$$

Изучение фундаментального решения ур.(8), удовлетворяющего упрощенным условиям (8a), является непростой задачей. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая одномерной диффузии с постоянным коэффициентом  $B_q = B = \text{const}$ . Предполагая, что протяженность области  $(-q_0, q_0)$  настолько велика, что диффундирующие фононы достигнут поверхности  $\pm q_0$  за бесконечно большое время, можно  $\pm q_0$  заменить бесконечностями. Тогда, используя метод характеристической функции, решение ур.(8) запишется в виде

$$\tilde{g}_q(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Bt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(q-q_1)^2}{4Bt}\right) G_{q_1} dq_1. \quad (9)$$

Из ур.(9) видно, что при больших значениях  $t$  имеем

$$\tilde{g}_q(t) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi Bt}} \int_{-\infty}^{\infty} G_{q_1} dq_1. \quad (10)$$

#### 4. Заключение

В настоящей работе представлен физический механизм возникновения и медленного (диффузионного) затухания равновесных флуктуаций функции распределения электронов и фононов в невырожденных электронных полупроводниках. Основное предположение сводится к тому, что в системе взаимодействующих электронов и фононов случайные  $\Phi$ - $\Phi$  рассеяния можно рассматривать как внешний источник флуктуации ФР электронов.

Ур.(9), которое справедливо в области  $|q| < q_0$ , показывает, что при больших значениях  $t$  флуктуация  $\tilde{g}_q(t)$  (и, следовательно,  $\tilde{f}_k(t)$ ) затухает по закону  $t^{-1/2}$  (см. ур.(10)). Примечательно, что спектральная плотность таких процессов имеет форму  $1/f$  [8,9]. В области  $|q| > q_0$  флуктуация  $\tilde{g}_q$ , согласно ур.(5), релаксирует по экспоненциальному закону. Как показывает анализ, в этом случае, при сравнительно больших  $\Delta t$  ( $\Delta t > \tau_{ph,ph}$ ) можно пренебречь корреляцией между  $\tilde{g}_q(t)$  и  $\tilde{g}_q(t + \Delta t)$  и величину  $G_q$  представить как обычный ланжевеновский источник белого шума. Вместе с тем, в области  $|q| < q_0$ , где  $\tilde{g}_q(t)$  затухает согласно закону (10), случайное возмущение  $G_q$  нельзя представить источником белого шума.

Согласно нашим предположениям, медленные затухания возникают в более ДВ области энергетического спектра электронов и фононов. Так как обычно  $|q_0| < q_T$ , то ясно, что количество медленно затухающих электронов и фононов обычно составляет лишь малую долю от их основной массы. Поэтому они практически не могут оказывать

существенного влияния на величину среднего тока. Однако наличие даже малой доли таких неравновесных электронов и фононов может играть весьма важную роль для флуктуации тока как в равновесных, так и в неравновесных полупроводниках.

Автор выражает признательность проф. В.М.Арутюняну и проф. Ф.В.Гаспаряну за ценные обсуждения и критические замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ш.М.Коган. УФН, 145, 285 (1985).
2. F.N.Hooge, T.G.M.Kleipenning, and L.K.J.Vandamme. Rep. Prog. Phys., 44, 479 (1981).
3. Г.П.Жигальский. УФН, 167, 623 (1997).
4. G.S.Kousic, C.M.Van Vliet, G.Bosman, P.H.Handel. Adv. in Phys., 34, 633 (1985).
5. M.Mihal. Phys. Letters, 107A, 465 (1985).
6. S.V.Melkonyan, F.V.Gasparyan, V.M.Aroutiounian, H.V.Asriyan. Mod. Phys. Lett., 12B, 1245 (1998).
7. F.V.Gasparyan, S.V.Melkonyan, V.M.Aroutiounian, H.V.Asriyan. Mod. Phys. Lett., 14B, 751 (2000).
8. H.Schonfeld. Z. Naturf., 10A, 291 (1955).
9. А.Н.Малахов. РТЭ, 4, 54 (1959).
10. Дж.М.Займан. Электроны и фононы. М., ИЛ, 1962.
11. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Физическая кинетика. М., Наука, 1979.

## ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ԲԱՇԽՍԱՆ ՖՈՆՆԿՑԻԱՅԻ ՀՎԱՍՍԱՐԱԿԻՈՒ ՖԼՈՒԿՏՈՒՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՆԴԱՂ ՍԱՐՍԱՆ ՍԵՒԱՆԻՉՍԸ ՉԱՅԼԱՍԵՐՎԱԾ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴԻՉՆԵՐՈՒՄ

Ս.Վ. ՄԵԼԿՈՆՅԱՆ

Չայրասերված էլեկտրոնային կիսահաղորդիչների համար քննարկված է էլեկտրոնների և ֆոնոնների բաշխման ֆունկցիաների հավասարակշիռ ֆլուկտացիաների առաջացման և հետագա դանդաղ (դիֆուզիոն) մարման ֆիզիկական մեխանիզմը: Յույց է տրված, որ էներգիական ալեկտրի ավելի երկարալիքային տիրույթում առաջացող ֆլուկտացիաներն ըստ ժամանակի մարում են  $t^{-1/2}$  օրենքով:

## SLOW DAMPING MECHANISM OF EQUILIBRIUM FLUCTUATIONS OF ELECTRON DISTRIBUTION FUNCTION IN NONDEGENERATE SEMICONDUCTORS

S.V. MELKONYAN

The physical mechanisms of appearance and following slow (diffusion) damping of the equilibrium fluctuations of electron and phonon distribution functions in nondegenerated n-type semiconductors are considered. It is shown that the fluctuations arising in the predominantly long wavelength range of the energy spectrum are damped according to the law proportional to  $t^{-1/2}$  at high values of  $t$ .